Exponentielles Wachstum

Immer mal dasselbe: der Wachstumsfaktor q

Klasse 9/10 · 45–60 min · Förderunterricht, Lernzeit, Nachhilfe

In dieser Stunde

		kopieren
Überblick und Ablauf	S. 2	nur für Sie
Typische Fehler erkennen	S. 3	nur für Sie
Aufwärm-Blitzkarten	S. 4	einmal je Gruppe, auf Karton
Arbeitsblatt in fünf Stufen	S. 5–6	für alle Jugendlichen
Plus-Seite	S. 7	für alle Jugendlichen
Fehler-Detektiv	S. 8	für alle Jugendlichen
Abschluss-Spiel	S. 9	einmal je Gruppe, auf Karton
Exit-Tickets	S. 10	eine Seite für drei Personen
Lösungen	S. 11–12	nur für Sie

Ablauf

Aufwärmen	**5–8′**
Hauptteil	**20–25′**
Fehler-Detektiv	**5–8′**
Bewegung	**2–3′**
Abschluss	**8–10′**



Am Ende können die Jugendlichen sagen …

- Ich erkenne, ob eine Tabelle linear oder exponentiell wächst.
- Ich bestimme den Wachstumsfaktor q aus einer Prozentangabe.
- Ich berechne mit $W = W_0 \cdot q^n$ Werte nach n Schritten, auch bei Abnahme.

Fünf Stützstufen im Arbeitsblatt

1. **Merken** — Merksatz mit Bild
2. **Zuschauen** — vorgerechnetes Beispiel
3. **Mitmachen** — Aufgaben mit Tipp
4. **Selbermachen** — Aufgaben ohne Hilfe
5. **Nachdenken** — erklären und begründen

Vorbereitung: etwa 15 Minuten (kopieren, 24 Karten schneiden). Für Nebenrechnungen: Heft oder Karopapier.

© Martin Schäpe

Exponentielles Wachstum: Immer mal dasselbe: der Wachstumsfaktor q

Ziel: Die Jugendlichen unterscheiden lineares und exponentielles Wachstum, bestimmen den Wachstumsfaktor q aus Prozentangaben und berechnen Werte schrittweise und mit $W = W_0 \cdot q^n$, auch bei Abnahme und Zinseszins.

> **Lehrplan:** In NRW ist exponentielles Wachstum als Prozess (Tabelle, Faktor, $W = W_0 \cdot q^n$ mit Taschenrechner) an Gesamtschulen Grundkurs, nach den alten Kernlehrplänen (Prüfungen 2026 und 2027) wie nach denen von 2022 (ab 2028). An Hauptschulen gehört es vor 2028 nur zum MSA, Zinseszins aber für alle. Exponentialfunktion mit Graph und Gleichungen wie $2^x = 64$ sind Erweiterungskurs (Plus-Seite). Das Thema kommt nur in Prüfungsteil 2 vor. Am Gymnasium liegt es laut Beispiel-Lehrplan in Klasse 10.

Phase	Zeit	Was passiert	Seite
Aufwärmen	**5–8 min**	Blitzkarten ohne Taschenrechner ziehen, laut lösen. Stapel „sicher“ und „noch üben“ bilden.	S. 4
Hauptteil	**20–25 min**	Papier falten, Lagen zählen, Tabelle anlegen. Danach Arbeitsblatt Stufe für Stufe, ab Stufe 3 mit Taschenrechner. Sichere Jugendliche: Plus-Seite (E-Kurs).	S. 5
Fehler-Detektiv	**5–8 min**	Vier Lösungen prüfen, Fehler benennen, richtig lösen.	S. 8
Bewegung	**2–3 min**	Plus-zwei gegen Mal-zwei auf zwei Bahnen mit 20 Feldern: A startet auf Feld 3 und geht je Runde 2 weiter, B startet auf Feld 1 und verdoppelt. Wer liegt nach Runde 3 vorn, wer nach Runde 4? Einzelnachhilfe: Sie laufen gegeneinander.	–
Abschluss	**8–10 min**	Memory „Prozent und Faktor“, danach Exit-Ticket.	S. 9

Nur 45 Minuten? Selbermachen a–d und g, Fehler-Detektiv mit Ben und Romy mündlich, Memory mit vier Paaren.

Vorwissen

- Prozentwert berechnen, Faktor 1,2 bei + 20 % (Band „Zuordnungen & Prozente“)
- Zinsen für ein Jahr berechnen
- Potenzen als wiederholte Multiplikation: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$

Material

- Seiten dieser Stunde, einseitig kopiert; Schere für die Memory-Karten
- 3 Blätter A4 (Altpapier) zum Falten; Taschenrechner und Karte „Mal q mehrfach“: 400 × 1,03 =, danach je Jahr nur × 1,03 =
- Kreppband für zwei Bahnen mit je 20 Feldern, zwei Spielfiguren; Formelsammlung EESA

Einstieg mit den Händen

Geben Sie jedem ein A4-Blatt. Die Jugendlichen falten es in der Mitte und zählen die Lagen: 1, 2, 4, 8. Jede Zahl kommt in eine Tabelle. Frage: „Wie viele Lagen wären es nach 10-mal Falten?“ Viele schätzen viel zu wenig. Rechnen Sie gemeinsam mit · 2 weiter bis 1024. Dann: „Was bleibt gleich – der Zuwachs oder der Faktor?“ Der Faktor 2 bleibt, der Zuwachs wächst.

So nutzen Sie die Stufen

Das Arbeitsblatt führt vom **Merken** über das **Zuschauen** (vorgerechnetes Beispiel) und **Mitmachen** (Aufgaben mit Tipp) zum **Selbermachen** und **Nachdenken**. Vorgerechnete Beispiele helfen vor allem Einsteigern; wer schon sicher ist, lernt mehr durch eigenes Lösen. Sichere Jugendliche überspringen deshalb Stufe 2 und gehen nach Stufe 4 zur Plus-Seite. Jugendliche, die hängen, bleiben bei Stufe 3 und bekommen die Faltblätter und den Taschenrechner mit der Karte „Mal q mehrfach“ in die Hand. Stufe 5 machen alle – unsichere Jugendliche mündlich am Material.

Typische Fehler erkennen und auffangen

Typische Denkfehler dieser Stunde mit einer Diagnosefrage und einem Impuls. Fehler sind hier willkommen: Sie zeigen, wo die Jugendlichen gerade stehen.

> Bei 50, 100, 200 kommt dann 300.

Typisch: exponentielles Wachstum linear fortgesetzt

Nachfragen: Rechne 100 : 50 und 200 : 100. Was bleibt gleich – der Zuwachs oder der Faktor?

Impuls: Jede Tabelle mit zwei Pfeilzeilen: „+ wie viel?“ und „· wie viel?“

> Zunahme um 3 %: q = 1,3.

Prozent und Faktor verwechselt

Nachfragen: Sind es nach einem Jahr 103 % oder 130 % des alten Werts?

Impuls: Erst sagen, wie viel Prozent es danach sind, dann als Dezimalzahl schreiben.

> Nach 3 Jahren: $500 \cdot 1{,}02^4$.

Zeitschritte falsch gezählt

Nachfragen: Wie viel Geld ist es nach 0 Jahren? Wie oft wird bis Jahr 3 multipliziert?

Impuls: Tabelle bei n = 0 beginnen; Hochzahl = Anzahl der Pfeile „· q“.

> 2 Jahre je 4 %: zusammen 8 % mehr.

Prozentsätze addiert

Nachfragen: Wovon werden im zweiten Jahr die 4 % berechnet?

Impuls: Jahr für Jahr eine Zeile: altes Kapital, Zinsen, neues Kapital.

Wortspeicher

Anfangswert W_0	der Wert am Start, bei n = 0
Wachstumsfaktor q	mit dieser Zahl wird in jedem Schritt multipliziert
Zunahme / Abnahme	+ 4 % heißt q = 1,04; – 4 % heißt q = 0,96
linear / exponentiell	linear: immer + gleich viel; exponentiell: immer · gleich viel
$W = W_0 \cdot q^n$	der Wert nach n Schritten (so steht es in der Formelsammlung EESA)
TR	Taschenrechner; Aufgaben mit (TR) gehören zu Prüfungsteil 2

Wenn es hakt

- Tabellen Schritt für Schritt mit dem Taschenrechner rechnen: × q, dann wieder × q. Das ist ein vollständiger Weg.
- Hakt der Faktor: erst fragen „Wie viel Prozent sind es danach?“, dann als Dezimalzahl schreiben.
- Hakt die Hochzahl: Tabelle bei n = 0 beginnen und die Pfeile zählen.

Aufwärm-Blitz



Teil 1 ist ohne Taschenrechner. Im Grundkurs wie im MSA gibt es dort lineare Funktionen.

✂ Karten ausschneiden, mischen, verdeckt stapeln.

1 Handytarif: 5 € fest und 2 € pro GB. Gleichung?	**2** (0|1) und (1|4): y = ?
3 Liegt P(2|3) auf y = 4x – 5?	**4** x: 0, 1, 2 und y: 7, 5, 3: y = ?
5 Welcher Faktor gehört zu + 20 %?	**6** 50 · 2 · 2 · 2
7 80 € werden um 10 % billiger. Neuer Preis?	**8** 1,5 · 40

Exponentielles Wachstum: Immer mal dasselbe: der Wachstumsfaktor q

Stufe 1 Merken

Exponentiell heißt: In jedem Schritt wird mit demselben Faktor q multipliziert.

- Linear: immer + gleich viel. Exponentiell: immer · gleich viel.
- Zunahme um 3 %: q = 1,03. Abnahme um 20 %: q = 0,8.
- Nach n Schritten: $W = W_0 \cdot q^n$. Der Anfangswert W_0 gehört zu n = 0.

Runde	Feld	
0	3	
1	5	+ 2
2	7	+ 2
3	9	+ 2

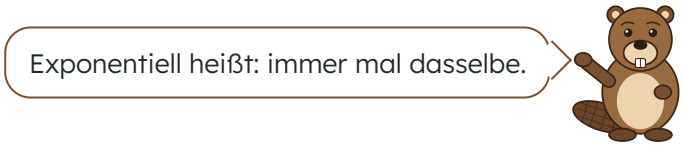
linear: immer + 2

Runde	Feld	
0	3	
1	6	· 2
2	12	· 2
3	24	· 2

exponentiell: immer · 2

Mit den Händen

Falte ein A4-Blatt immer wieder in der Mitte. Zähle jedes Mal die Lagen. Wie viele sind es nach 5-mal Falten? ☐



Stufe 2 Zuschauen

Zinseszins: 400 € zu 3 % für 2 Jahre

3 % mehr: Es sind 103 %	q = 1,03
Nach 1 Jahr: 400 € · 1,03	412 €
Nach 2 Jahren: 412 € · 1,03	424,36 €

Kurz mit dem TR: $400 \cdot 1{,}03^2 = 424{,}36$ €. Die Zinsen bleiben auf dem Konto und bekommen selbst Zinsen.

Abnahme: Ein Handy für 800 € verliert pro Jahr 20 % an Wert

20 % weniger: 80 % bleiben	q = 0,8
Anfangswert 800 €, n = 3 Jahre	$W = 800 \cdot 0{,}8^3$
Mit dem TR ausrechnen	W = 409,60 €

Probe Schritt für Schritt: 800 → 640 → 512 → 409,60. Drei Pfeile „· 0,8“, also Hochzahl 3.